6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Οι συντεταγμένες σημείου

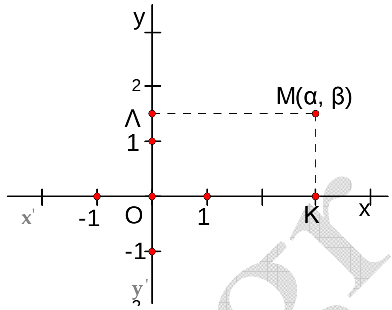
x΄Ox άξονας τετμημένων

y΄Oy άξονας τεταγμένων

(ΟΚ) με πρόσημο = α, η **τετμημένη** του Μ

(ΟΛ) με πρόσημο = β, η **τεταγμένη** του Μ

Το ζευγάρι (α, β), οι **συντεταγμένες** του Μ



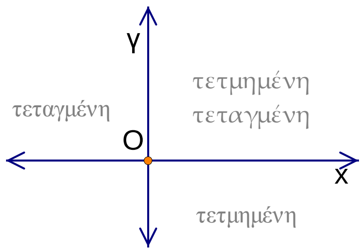
2.
Τα σημεία των αξόνων

Τα σημεία του άξονα x΄x έχουν τεταγμένη 0, δηλαδή είναι K(α, 0)

Τα σημεία του άξονα y΄y έχουν τετμημένη 0, δηλαδή είναι Λ(0, β)

3.
Το πρόσημο των συντεταγμένων

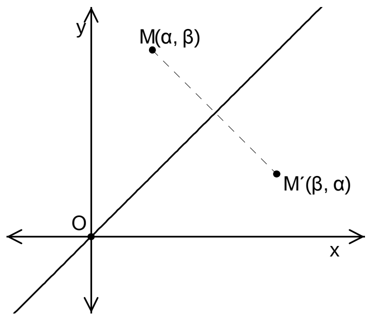
Όπου γράφεται η λέξη έχουμε πρόσημο +



4.
Τα σημεία Μ(α, β) και Μ΄(β, α)

Είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο

1ης – 3ης γωνίας των αξόνων



5.
Η απόσταση (ΑΒ) των σημείων $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ή αν θέλετε $(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

6.
Γραφική παράσταση συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$

Λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$

- Η γραφική παράσταση της f συμβολίζεται C_f
- Ο τύπος $y = f(x)$ της συνάρτησης λέγεται και εξίσωση της C_f
- Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των σημείων της C_f και μόνο απ' αυτές
- Κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.
- Η C_{-f} είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.
Επισήμανση

- Αν ένα σημείο ανήκει στη C_f, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο $y = f(x)$.
- Αν οι συντεταγμένες σημείου επαληθεύουν τον τύπο $y = f(x)$, τότε το σημείο ανήκει στη C_f.

2.
Μέθοδος

Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, στον τύπο $y = f(x)$ θέτουμε όπου y το 0 και λύνουμε την εξίσωση.

Ουσιαστικά λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$

3.
Μέθοδος

Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$, στον τύπο $y = f(x)$ θέτουμε όπου x το 0.

Ουσιαστικά λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y= f(x) \\ x= 0 \end{cases}$

4.

Παρατήρηση

Η γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης μπορεί να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε πολλά σημεία, ενώ τον άξονα $y'y$ το πολύ σε ένα.

5.

Μέθοδος

Για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f, C_g, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Ουσιαστικά λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

6.

Μέθοδος

Για να βρούμε τα x για τα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g, λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 1$. Να βρείτε

i) το σημείο της C_f που έχει τετμημένη 1

ii) τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη 2

iii) τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη -2

Προτεινόμενη λύση

$D_f = \mathbb{R}$

i)

Έστω $A(1, y)$ το ζητούμενο σημείο.

Επειδή $A \in C_f$, θα επαληθεύει τον τύπο $f(x) = 3x^2 - 1$ της συνάρτησης

$$y = 3\cdot 1^2 - 1$$
$$y = 2$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $A(1, 2)$

ii)

Έστω $B(x, 2)$ ζητούμενο σημείο.

Επειδή $B \in C_f$, θα επαληθεύει τον τύπο $f(x) = 3x^2 - 1$ της συνάρτησης

$$2 = 3x^2 - 1$$
$$3 = 3x^2$$
$$x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad ή \quad x = -1$$

Άρα έχουμε δύο ζητούμενα σημεία, τα $B(1, 2)$, $B'(-1, 2)$

iii)

Έστω $\Gamma(x, -2)$ ζητούμενο σημείο.

Επειδή $\Gamma \in C_f$, θα επαληθεύει τον τύπο $f(x) = 3x^2 - 1$ της συνάρτησης

$$-2 = 3x^2 - 1$$
$$-1 = 3x^2 \quad \text{αδύνατη}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοιο σημείο.

2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4$. Να βρείτε

i) τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$

ii) το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$

Προτεινόμενη λύση

$D_f = \mathbb{R}$

i)

Σχόλιο 2

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4$

$x^2 = 4$

$x = 2$ ή $x = -2$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$

ii)

Σχόλιο 3

$f(0) = 0^2 - 4 = -4$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -4)$

3.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f, C_g

Προτεινόμενη λύση

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x^2 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) = 0 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x - 3 = 0 \\ y = 3x \end{cases}$

- Για $x = 0$, η $y = 3x \Rightarrow y = 0$. Σημείο τομής $A(0, 0)$
- Για $x = 3$, η $y = 3x \Rightarrow y = 9$. Σημείο τομής $B(3, 9)$

4.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + x + 1$ και $g(x) = 2x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του k ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινό σημείο.

ii) Όταν $k = \frac{3}{4}$, να βρείτε για ποια x η C_f είναι πάνω από τη C_g.

Προτεινόμενη λύση

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$

i)

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

Σχόλιο 5

$$x^2 + x + 1 = 2x + k$$

$$x^2 - x + (1 - k) = 0 \quad \mathbf{(1)}$$

Οι C_f, C_g να έχουν κοινό σημείο $\Leftrightarrow$ η εξίσωση (1) έχει ρίζα

$$\Delta \geq 0$$

$$1 - 4(1 - k) \geq 0$$

$$1 - 4 + 4k \geq 0$$

$$4k \geq 3$$

$$k \geq \frac{3}{4}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του k είναι $\frac{3}{4}$

ii)

Τα ζητούμενα x είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$

Σχόλιο 5

$$x^2 + x + 1 > 2x + \frac{3}{4}$$

$$4x^2 + 4x + 4 > 8x + 3$$

$$4x^2 - 4x + 1 > 0$$

$$(2x - 1)^2 > 0$$

$$2x - 1 \neq 0$$

$$2x \neq 1$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$

5.

Δίνονται τα σημεία $B(1,\ 4)$, $\Gamma(5, 2)$. Να βρείτε σημείο A του άξονα $x'x$, ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές $(AB = A\Gamma)$

Προτεινόμενη λύση

Αφού το σημείο A ανήκει στον άξονα $x'x$, θα είναι $A(x, 0)$

$$AB = A\Gamma \iff (AB)^2 = (A\Gamma)^2 \iff (1-x)^2 + (4-0)^2 = (5-x)^2 + (2-0)^2$$

$$1 - 2x + x^2 + 16 = 25 - 10x + x^2 + 4$$

$$8x = 12 \iff x = \frac{3}{2}$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι $A\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$

6.

Δίνονται τα σημεία $B(1,\ 4)$, $\Gamma(5, 2)$. Να βρείτε σημείο A του άξονα $y'y$, ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές $(AB = A\Gamma)$

Προτεινόμενη λύση

Αφού το σημείο A ανήκει στον άξονα , $y'y$ θα είναι $A(0, y)$

Πρέπει και αρκεί $AB = A\Gamma \iff (AB)^2 = (A\Gamma)^2 \iff$

$$(1-0)^2 + (4-y)^2 = (5-0)^2 + (2-y)^2$$

$$1 + 16 - 8y + y^2 = 25 + 4 - 4y + y^2$$

$$-4y = 12$$

$$y = -3$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι $A(0, -3)$

7.

Δίνονται τα σημεία Β(1, 2) και Γ(3, 1). Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο Α του άξονα $x'x$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο στο Α.

Προτεινόμενη λύση

Έστω Α(x, 0) το ζητούμενο σημείο $\Leftrightarrow$

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2$$

$$(x-1)^2 + (0-2)^2 + (x-3)^2 + (0-1)^2 = (3-1)^2 + (1-2)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4 + x^2 - 6x + 9 + 1 = 4 + 1$$

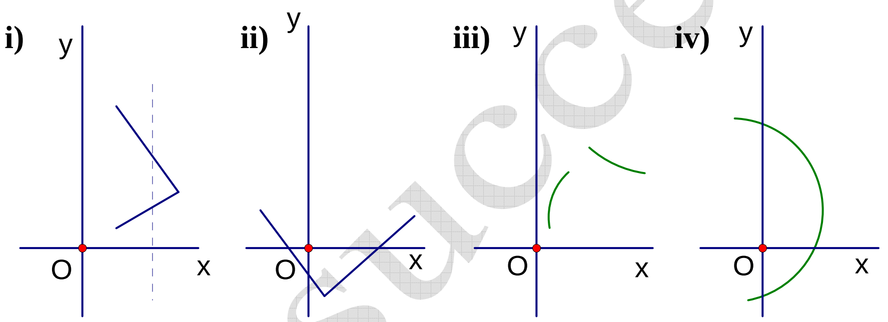
$$x^2 - 4x + 5 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$. Άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

Επομένως δεν υπάρχει τέτοιο σημείο Α.

8.

Ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων;



Προτεινόμενη λύση

Συναρτήσεις είναι οι (ii) και (iii), διότι η οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την αντίστοιχη γραφική παράσταση το πολύ σε ένα σημείο.

Συναρτήσεις δεν είναι οι (i) και (iv), διότι μία τουλάχιστον κατακόρυφη ευθεία τέμνει την αντίστοιχη γραφική παράσταση σε δύο σημεία.

9.

i) Αν (α, β) είναι οι συντεταγμένες σημείου Μ, ποια είναι η απόσταση του Μ από τον άξονα $x'x$;

ii) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 7$. Να βρείτε κάθε σημείο της C_f το οποίο απέχει από τον άξονα $x'x$ απόσταση 2.

Προτεινόμενη λύση

i)

Η απόσταση του Μ από τον άξονα $x'x$ είναι $|\beta|$

ii)

$D_f = \mathbb{R}$

Έστω $K(x, f(x))$ ζητούμενο σημείο $\Leftrightarrow$ $d(K, x'x) = 2$

$|f(x)| = 2$

$|x^2 - 6x + 7| = 2$

$x^2 - 6x + 7 = 2$ ή $x^2 - 6x + 7 = -2$

$x^2 - 6x + 5 = 0$ ή $x^2 - 6x + 9 = 0$

$x = 1$ ή $x = 5$ ή $(x-3)^2 = 0$

$x = 1$ ή $x = 5$ ή $x = 3$

$f(1) = 1^2 - 6\cdot 1 + 7 = 2$ Ζητούμενο σημείο το Α(1, 2)

$f(5) = 5^2 - 6\cdot 5 + 7 = 25 - 30 + 7 = 2$ Ζητούμενο σημείο το Α(5, 2)

$f(3) = 3^2 - 6\cdot 3 + 7 = 9 - 18 + 7 = -2$ Ζητούμενο σημείο το Α(3, – 2)

10.

i) Αν (α, β) είναι οι συντεταγμένες σημείου M, ποια είναι η απόσταση του M από τον άξονα $y'y$;

ii) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 7$. Να βρείτε κάθε σημείο της C_f το οποίο απέχει από τον άξονα $y'y$ απόσταση 2.

Προτεινόμενη λύση

i)

Η απόσταση του M από τον άξονα $y'y$ είναι $|\alpha|$

ii)

$D_f = \mathbb{R}$

Έστω $K(x, f(x))$ ζητούμενο σημείο $\Leftrightarrow$ $d(K, y'y) = 2$

$$|x| = 2$$

$$x = 2 \quad ή \quad x = -2$$

$f(2) = 2^2 - 6\cdot 2 + 7 = 4 - 12 + 7 = -1$ Ζητούμενο σημείο το $A(2, -1)$

$f(-2) = (-2)^2 - 6\cdot(-2) + 7 = 4 + 12 + 7 = 23$ Ζητούμενο σημείο το $A(-2, 23)$